

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

STUDIENKOLLEG

TEST IM FACH

MATHEMATIK

FÜR STUDIENBEWERBER MIT BERUFSQUALIFIKATION

NAME : _____ **VORNAME :** _____

Bearbeitungszeit : 180 Minuten

Hilfsmittel : Formelsammlung, Taschenrechner.

Erreichbare Punktzahl : 180

**Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben in den freien Feldern
hinter den einzelnen Aufgaben. Sollte der zur Verfügung
stehende Platz nicht ausreichen, benutzen Sie bitte die
Blattrückseite.**

Rechnungen müssen vollständig und nachvollziehbar sein.

Viel Erfolg !

Teil 1 Mathematische Logik

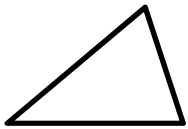
Aufgabe 1 In der zweiwertigen Logik gibt es nur die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“.
(25 Punkte) Geben Sie bei jedem Aufgabenteil an, ob der genannte Zusammenhang Ihrer Meinung nach „wahr“ oder „falsch“ ist. Wenn Sie „falsch“ annehmen, dann geben Sie bitte ein Gegenbeispiel oder den korrekten Zusammenhang an.

- a) Jede Zahl, die durch sechs teilbar ist, ist auch durch drei teilbar.
Wahr **1 Punkt**
- b) Das Produkt aus zwei ungeraden Zahlen ist immer eine ungerade Zahl.
Wahr **1 Punkt**
- c) Die Summe aus zwei ungeraden Zahlen ist immer eine ungerade Zahl.
Falsch, die Summe ist immer gerade. Beispiel: $3+7 = 10$ **2 Punkte**
- d) Die Summe von zwei reellen Zahlen ist immer größer als jeder der beiden Summanden.
Falsch, Beispiel: $-6 + 1 = -5$ mit $-5 < 1$ **2 Punkte**
- e) Das Produkt von zwei reellen Zahlen ist immer größer als jeder der beiden Faktoren.
Falsch, Beispiel: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ mit $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$ **2 Punkte**
- f) In einem Dreieck mit drei gleich langen Seiten sind alle Winkel gleich groß.
Wahr **1 Punkt**
- g) In einem Viereck mit vier gleich großen Winkeln sind alle Seiten gleich lang.
Falsch, Beispiel: Rechteck **1 Punkt**
- h) Jeder Kreis hat unendlich viele Symmetrieachsen.
Wahr **1 Punkt**
- i) Jedes Dreieck hat mindestens zwei spitze Winkel.
Wahr **1 Punkt**
- j) Jedes Viereck hat höchstens zwei stumpfe Winkel.
Falsch, es können auch drei stumpfe Winkel sein. Beispiel: Drachen **3 Punkte**
- k) Wenn die Kantenlänge eines Würfels verdoppelt wird, dann wächst das Volumen auf das Vierfache.
Falsch, das Volumen wächst auf das Achtfache **3 Punkte**
- l) Wenn der Durchmesser einer Kugel verdreifacht wird, dann wächst die Oberfläche auf das Sechsfache.
Falsch, die Oberfläche wächst auf das Neunfache **3 Punkte**
- m) Jeder Quader hat acht Raumdiagonalen, die sich alle im Mittelpunkt des Quaders schneiden.
Falsch, es sind nur vier Raumdiagonalen, diese schneiden sich alle im Quadermittelpunkt. **3 Punkte**

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 2 In einer ebenen Figur mit mindestens vier Ecken ist eine Diagonale eine gerade Linie, die zwei nicht benachbarten Eckpunkte verbinden.
(9 Punkte) Bestimmen Sie die Anzahl der Diagonalen für ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck und ein Sechseck, fertigen Sie dafür Skizzen an.

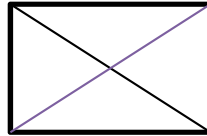
Dreieck



Keine Diagonale

0,5 Punkte

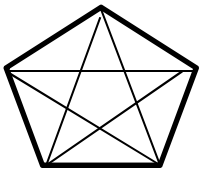
Viereck



Zwei Diagonalen

1,5 Punkte

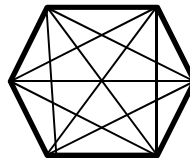
Fünfeck



Fünf Diagonalen

3 Punkte

Sechseck



Neun Diagonalen

4 Punkte

Aufgabe 3 Wie oft überholt der Minutenzeiger einer Uhr den Stundenzeiger zwischen 0.30 Uhr
(4 Punkte) und 0.30 Uhr des Folgetages?

In 24 Stunden macht der Minutenzeiger 24 Umläufe, der Stundenzeiger 2 Umläufe. Daher überholt der Minutenzeiger $24 - 2 = 22$ -mal den Stundenzeiger. **4 Punkte**

Aufgabe 4 Eine Erbschaft von 20 500 € wird unter die drei Erben Anna, Bernd und Clara wie folgt aufgeteilt:
(6 Punkte) Anna erhält doppelt so viel wie Bernd, Clara erhält 2 000 € weniger als Anna. Welchen Betrag erhält jede der drei Personen?

Bernd erhält x

Anna erhält $2x$

Clara erhält $2x - 2000$

2 Punkte

$$x + 2x + 2x - 2000 = 20500$$

1 Punkt

$$5x = 22500$$

$$x = 4500$$

1 Punkt

Anna erhält 9000 €, Bernd erhält 4500 €
und Clara erhält 7000 €.

2 Punkte

Weiter auf Seite 3

Aufgabe 5 Ergänzen Sie jede der angegebenen Zahlenfolgen um drei weitere Folgenglieder:
(10 Punkte)

a) 1 ; 9 ; 17 ; 25 ; ... 33 ; 41 ; 49 **2 Punkte**

b) 3 ; 5 ; 9 ; 17 ; 33 ; ... 65 ; 129 ; 257 **3 Punkte**

c) $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{2}$; 2 ; - 8 ; ... 32 ; -128 ; 512 **2 Punkte**

d) Eine Zahlenfolge hat das allgemeine Folgenglied $a_n = n(n - 1)$.
Geben Sie die Zahlenwerte der ersten vier Folgenglieder an.

$$a_1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$a_2 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot 3 = 12$$

3 Punkte

Aufgabe 6 Wie viel Paar Hände werden geschüttelt, wenn beim Zusammentreffen von Personen
(6 Punkte) jeder jeden mit Handschlag begrüßt?

Geben Sie die Anzahl an für das Zusammentreffen von zwei Personen, von drei
Personen und von vier Personen.

2 Personen: 1 Paar **1 Punkt**

3 Personen: 3 Paar **2 Punkte**

4 Personen: 6 Paar **3 Punkte**

Aufgabe 7 Einhundert Kugeln sind nummeriert mit den Zahlen von eins bis einhundert.
(5 Punkte) Auf wie vielen Kugeln enthält die Zahl mindestens einmal die Ziffer eins?

1 ; 11 ; 21 ; ; 91 → 10 Kugeln **1 Punkt**

10 ; ~~11~~ ; 12 ; 13 ; ; 19 → 9 weitere Kugeln **2 Punkte**

100 → 1 Kugel **1 Punkt**

⇒ 20 Kugeln **1 Punkt**

Weiter auf Seite 4

Teil 2 Mathematische Grundlagen

Aufgabe 8 Kreuzen Sie für jede der in der ersten Tabellenzeile angegebenen Zahlen z alle (6 Punkte) Zahlbereiche an, in denen z enthalten ist. Es bedeuten: IN : Natürliche Zahlen ; Z : Ganze Zahlen ; \mathbb{Q} : Rationale Zahlen und IR : Reelle Zahlen .

z	$-1,7^0$	π	$-3/16$	$\sqrt{64}$	$-\sqrt[3]{8}$	$\sqrt{-9}$	$3,45$	$2,5 \cdot 10^3$
IN				x				x
Z	x			x	x			x
\mathbb{Q}	x		x	x	x		x	x
IR	x	x	x	x	x		x	x
	1 P	0,5 P	0,5 P	0,5 P	1 P	0,5 P	1 P	1 P

Aufgabe 9 Berechnen Sie: (4 Punkte)

a)

$$2 + \frac{1}{4 - \frac{3}{2 + 1}} = \frac{1}{3}$$

2 Punkte

b)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{3}{24} + \frac{4}{32} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 2$$

2 Punkte

Aufgabe 10 Vereinfachen Sie folgende Terme: (11 Punkte)

a)

$$6a^3 + (4a)^2 - 2(-a)^3 - 4a^2 + (-2a)^3 + 4(-a)^2 + (-4a)^2 = 6a^3 + 16a^2 + 2a^3 - 4a^2 - 8a^3 + 4a^2 + 16a^2 = 32a^2$$

3 Punkte

b)

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

1 Punkt

c)

$$\sqrt[3]{(32z^5)/(4z^2)} = \sqrt[3]{8z^3} = 2z$$

3 Punkte

d)

$$\frac{a^2bc^3}{b-c} : \frac{(ac)^2}{b^2-c^2} = \frac{a^2bc^3 \cdot (b-c)(b+c)}{(b-c) \cdot a^2c^2} = bc(b+c)$$

4 Punkte

Aufgabe 11 Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der binomischen Formel :
(3 Punkte)

$$(9r - \boxed{3s^2})^2 = \boxed{81r^2} - 54rs^2 + \boxed{9s^4}$$

3 Punkte

Aufgabe 12 Lösen Sie die Zinseszinsformel $K_n = K_0 (1 + p/100)^n$
(4 Punkte)

a) nach K_0 auf: $K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$

1 Punkt

b) nach p auf: $p = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right) \cdot 100$

3 Punkte

Aufgabe 13 Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen :
(7 Punkte)

a) $2^{3x-5} = 128 \Rightarrow 2^{3x-5} = 2^7 \Rightarrow 3x - 5 = 7$
 $\Rightarrow 3x = 12$
 $\Rightarrow x = 4$

2 Punkte

b) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{16}{x^2-4} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$\begin{aligned} (x-2)(x-2) - (x+2)(x+2) &= 16 \\ x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 &= 16 \\ -8x &= 16 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

\Rightarrow Es gibt keine Lösung

5 Punkte

Aufgabe 14 Bestimmen Sie für die folgenden Gleichungen jeweils die Lösungsmenge:
(6 Punkte)

a) $0 = 2x^2 + 3x - 2$
 $0 = x^2 + \frac{3}{2}x - 1$
 $x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}}$
 $x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$
 $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -2 \quad L = \left\{\frac{1}{2}; -2\right\}$

4 Punkte

b) $0 = x^2 + 1,5x + 1$
 $x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{16}{16}}$
 $x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{7}{16}} \Rightarrow L = \{ \}$

2 Punkte

Aufgabe 15 Gesucht sind zwei ganze Zahlen x und y . Stellen Sie zwei Gleichungen (6 Punkte) (I) und (II) auf aus folgenden Angaben:

- (I) Multipliziert man die Summe dieser ersten und zweiten Zahl mit fünf, dann erhält man das um eins verminderte Doppelte der zweiten Zahl.
(II) Wenn man zur Differenz von erster und zweiter Zahl vier addiert, dann erhält man die Hälfte der ersten Zahl.

Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf und berechnen Sie die Werte der beiden gesuchten Zahlen.

Erste Zahl: x

Zweite Zahl: y

(I) $(x + y) \cdot 5 = 2y - 1$

(II) $\underline{x - y + 4 = 0,5x}$

2 Punkte

(I) $5x + 3y = -1$

(II) $\underline{0,5x - y = -4} \quad | \cdot 3 \quad | +$

2 Punkte

$6,5x = 13$

$x = -2 \Rightarrow$ Erste Zahl: $x = -2$

x in (II) $-1 - y = -4$

$y = 3 \Rightarrow$ Zweite Zahl: $y = 3$

2 Punkte

Aufgabe 16 a) Aus sechs Kilogramm Johannisbeeren erhält man vier Liter Saft. Wie viel (6 Punkte) Kilogramm Johannisbeeren benötigt man für vierzehn Liter Saft?

$6 \text{ Kg} \triangleq 4 \text{ l} \quad | : 4$

$1,5 \text{ Kg} \triangleq 1 \text{ l} \quad | \cdot 14$

$21 \text{ Kg} \triangleq 14 \text{ l} \quad \Rightarrow$ Man benötigt 21 Kg

3 Punkte

b) Ein Gehweg soll gepflastert werden. Sechs Arbeiter benötigen dafür zwanzig Stunden. Wie viel Zeit benötigen fünf Arbeiter für die gleiche Arbeit?

$6 \text{ Arbeiter} \triangleq 20 \text{ Stunden}$

$1 \text{ Arbeiter} \triangleq 120 \text{ Stunden}$

$5 \text{ Arbeiter} \triangleq 24 \text{ Stunden}$

\Rightarrow Fünf Arbeiter benötigen 24 Stunden

3 Punkte

Aufgabe 17 Nach einer Reduzierung (Rabatt) um 30 % kostet eine Hose im Schlussverkauf (3 Punkte) noch 56,00 €. Wie teuer war die Hose vor der Preisreduzierung?

$56,00 \text{ €} \triangleq 20 \text{ Stunden}$

$8,00 \text{ €} \triangleq 120 \text{ Stunden}$

$80,00 \text{ €} \triangleq 24 \text{ Stunden} \Rightarrow$ Der alte Preis betrug 80,00 € **3 Punkte**

Aufgabe 18 Auf ein Kapital von 4 000 € erhält ein Sparer in einem Monat 10,00 € Zinsen. (3 Punkte) Wie viel Prozent beträgt die jährliche Verzinsung?

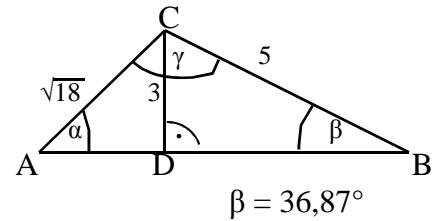
Jahreszinsen : $12 \cdot 10,00 \text{ €} = 120,00 \text{ €}$

$p = \frac{100 \cdot W}{G} \Rightarrow p = \frac{100 \cdot 120}{4000} \Rightarrow p = 3$

\Rightarrow Die Jährliche Verzinsung beträgt 3 %

3 Punkte

Aufgabe 19 Bestimmen Sie für das abgebildete Dreieck (9 Punkte) die Strecke \overline{AD} , die Winkel α und γ sowie den Flächeninhalt A . (Längen in cm).



$$\overline{AD} = \sqrt{18 - 9} \Rightarrow \overline{AD} = 3 \text{ cm}$$

2 Punkte

$$\overline{AD} = \overline{CD} \text{ und } \overline{AD} \perp \overline{CD} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

2 Punkte

$$\gamma = 180^\circ - 45^\circ - 36,87^\circ \Rightarrow \gamma = 98,13^\circ$$

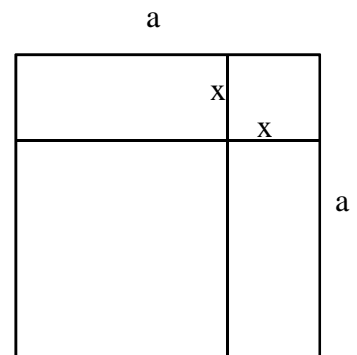
2 Punkte

$$\overline{BD} = \sqrt{25 - 9} \Rightarrow \overline{BD} = 4 \text{ cm}$$

3 Punkte

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} \Rightarrow A = \frac{(3+4) \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 10,5 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 20 Ein Quadrat mit Kantenlänge $a = 11 \text{ cm}$ wird (7 Punkte) durch zwei kantenparallele Linien in zwei Quadrate und zwei Rechtecke geteilt. Die Summe der Flächen der beiden Quadrate beträgt $A = 73 \text{ cm}^2$. Wie lang ist die Strecke x ($0 < x < a/2$)? Stellen Sie eine Gleichung für x auf und berechnen Sie daraus x .



$$(a - x)^2 + x^2 = A$$

2 Punkte

$$(11 - x)^2 + x^2 = 73$$

2 Punkte

$$121 - 22x + x^2 + x^2 = 73$$

$$2x^2 - 22x + 48 = 0$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{96}{4}}$$

$$x_1 = \frac{11}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 8 \Rightarrow x_1 > \frac{a}{2}$$

2 Punkte

$$x_2 = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow x_2 < \frac{a}{2}$$

1 Punkt

Aufgabe 21 Ein Würfel hat das Volumen $V = 216 \text{ cm}^3$. Berechnen Sie seine Oberfläche. (3 Punkte)

$$V = a^3$$

$$216 \text{ cm}^3 = a^3 \Rightarrow a = 6 \text{ cm}$$

$$A(o) = 6 \cdot a^2$$

$$A(o) = 6 \cdot (6 \text{ cm})^2 \Rightarrow A(o) = 216 \text{ cm}^2$$

3 Punkte

Aufgabe 22 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g in ein gemeinsames (12 Punkte) Koordinatensystem und berechnen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte.

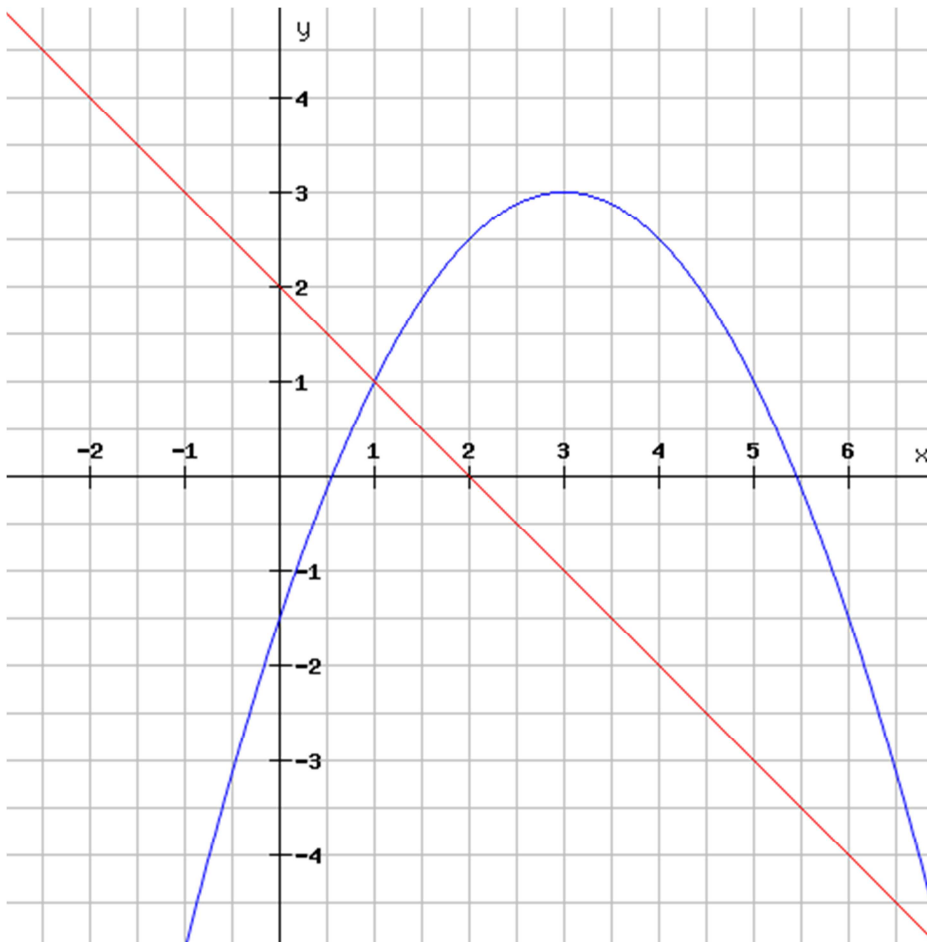
Zeichnung:

$$f(x) = -x + 2$$

2 Punkte

$$g(x) = -0,5x^2 + 3x - 1,5$$

4 Punkte



$$f(x_s) = g(x_s)$$

$$-x_s + 2 = -0,5x_s^2 + 3x_s - 1,5$$

1 Punkt

$$0,5x_s^2 - 4x_s + 3,5 = 0$$

$$x_s^2 - 8x_s + 7 = 0$$

1 Punkt

$$x_{s_{1,2}} = 4 \pm \sqrt{16 - 7}$$

$$x_{s_1} = 4 + 3 = 7$$

1 Punkt

$$x_{s_2} = 4 - 3 = 1$$

1 Punkt

$$f(7) = -7 + 2 = -5 \quad \Rightarrow S_1(7 | -5)$$

1 Punkt

$$f(1) = -1 + 2 = 1 \quad \Rightarrow S_2(1 | 1)$$

1 Punkt

Weiter auf Seite 9

Teil 3 Mathematik aus der gymnasialen Oberstufe

Aufgabe 23 Gegeben sind die vier Vektoren
(3 Punkte)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\vec{a} + 16\vec{b} - \vec{c} + 10\vec{d} = \vec{e}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1,5 Punkte

b) $\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 + 4 - 3 = 0$

1,5 Punkte

Aufgabe 24 Bilden Sie jeweils die Ableitungsfunktion $f'(x)$:
(7 Punkte)

a) $f(x) = -2x^3 + x - 2 + 3x^{-1}$

$$f'(x) = -6x^2 + 1 - 3x^{-2}$$

1 Punkt

b) $f(x) = \sqrt{0,5x^2 + x}$

$$f'(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{0,5x^2+x}}$$

2 Punkte

c) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - (x^2+4) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 8x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

4 Punkte

Aufgabe 25 Berechnen Sie
(4 Punkte)

a) $\int (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$

1,5 Punkte

b) $\int_{-3}^2 (x^2 - 2x + 1) dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_{-3}^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 2 \right) - (-9 - 9 - 3)$$

$$= \frac{2}{3} + 21 = \frac{65}{3}$$

2,5 Punkte

Weiter auf Seite 10

Aufgabe 26 Gegeben ist die Funktion f mit
(11 Punkte)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad .$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f .

$$0 = x(x^2 - 6x + 9)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \forall x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 - 9}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Doppelte} \\ \text{Nullstelle} \end{array}$$

3 Punkte

b) Berechnen Sie die Extrempunkte der Funktion f und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$

$$x_1 = 3 \quad f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$$

$$x_2 = 1 \quad f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$$

$$f''(3) = 18 - 12 > 0 \Rightarrow T(3|0)$$

$$f''(1) = 6 - 12 < 0 \Rightarrow H(1|4)$$

6 Punkte

c) Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion f .

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow W(2|2)$$

2 Punkte